

# Optimización simultánea para la mejora continua y reducción de costos en procesos

Jorge Domínguez Domínguez<sup>1</sup>

*Recepción: 04 de agosto de 2006 — Aceptación: 27 de octubre de 2006*

*Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo*

---

## Resumen

Muchos problemas de optimización son caracterizados por la flexibilidad para establecer la utilidad entre las funciones objetivo. La estrategia experimental desempeña un papel importante para generar estas funciones objetivo, además, ésta se ha aplicado de manera conveniente para disminuir costos de calidad y en la mejora continua de la calidad de procesos y productos. Es frecuente encontrar muchas aplicaciones industriales con varias respuestas cuya finalidad es alcanzar la calidad global de un producto, por lo que es necesario optimizar de manera simultánea las respuestas de interés. En esencia, el problema de optimización de varias respuestas involucra la selección de un conjunto de condiciones o variables independientes tales que den como resultado un producto o servicio adecuado. Es decir, se desea seleccionar los niveles de las variables independientes que optimicen todas las respuestas a la vez.

En esta presentación se mostrarán dos procedimientos para construir una función que describa la combinación de los objetivos de las respuestas individuales. El primer método es un modelo de optimización multiplicativo y el segundo es aditivo, estos se aplicarán a dos casos de estudio realizados en la industria con el fin de resaltar los procesos de mejora continua y la disminución de costos. La optimización simultánea, utilizando estos dos procedimientos, se ilustrarán mediante técnicas de graficación ya que éstas permiten generar varios escenarios de posibles soluciones óptimas. En estos ejemplos se observó que ambos métodos producen resultados similares al generar el óptimo, sin embargo al compararlos de manera global mediante la función de pérdida existe una ligera diferencia entre ellos.

---

<sup>1</sup> Doctor en ciencias matemáticas, jorge@cimat.mx, investigador, CIMAT, México.

**Palabras claves:** diseños de experimentos, modelos, función de pérdida, optimización multi-respuesta, método gráfico.

## Abstract

Many problems of optimization are characterized by the flexibility to establish the utility among the functions objectives. Experimental strategy plays a very important part for generating theses functions. This specific strategy has also been applied in an important way to reduce costs when desiring quality and its continuous improvement in processes and products. It is common to find many industrial applications with several responses whose purpose is to reach the global level of quality of a product. Therefore it is necessary to simultaneously optimize in a simultaneous the responses that the researcher desires. In essence, the problem of optimization of various responses involves the selection of a set of conditions or independent variables such that give a product or some convenient service an ideal result. The wish is to select the levels of independent variables that optimize all the responses at the same time.

Two procedures will be displayed here in order to build a function that represents a combination of the objectives of the individual responses. The first method is a model of optimization multiplicativo and the second additive. These will be applied to two cases of study which will be carried out in the industry for the purpose of pointing out the processes of continuous improvement and the decrease in costs. The simultaneous optimization, using these two procedures, will be illustrated by graphical means. This will allow a generation of several scenarios showing possible optimum solutions. In these examples it was observed that both methods produce similar results when generating the optimum one, however when comparing them in a global way by means of the loss function a slight difference it exists among them.

**Key words:** designs of experiments, models, loss function, optimization multi-response, graphic method.

---

## 1 Introducción

La mejora de un proceso representa un reto para las industrias, éstas invierten una cantidad importante de capital con ese fin. El destino de esos recursos se orienta a la compra de nueva maquinaria, a la capacitación del personal, y al esfuerzo por alcanzar estándares de calidad más competitivos. Sin embargo destinan poco dinero al desarrollo de tecnología. En la actualidad existe

un pequeño acercamiento entre las universidades y empresas para alentar la investigación con el fin de propiciar el desarrollo tecnológico.

En resumen, la finalidad principal de muchas empresas es desarrollar nuevos procesos y productos o la mejora continua de estos. La calidad global de los productos esta representada por muchas características de interés, y éstas a la vez, están en función de un conjunto de factores de control. Para obtener el valor de respuesta de esas características se recurre a una estrategia experimental. El tipo de diseño que se utiliza, involucra los factores de interés con el fin de encontrar la combinación que corresponda de la mejor manera a todas las características. A este proceso se le conoce como un diseño de optimización multi-respuesta en la que las características de interés se definen como respuesta múltiple.

Una aproximación que se usa de manera común para resolver los problemas de diseño multi-respuesta es considerar una función objetivo unificada, esto es, las respuestas individuales son matemáticamente combinadas para generar una función simple. Inicialmente las variables de respuesta individuales son modeladas para crear una superficie de respuesta de un diseño experimental. A cada variable de respuesta se le aplica una transformación de tal manera que todas las respuestas se puedan combinar en una sola función. A partir de ahí se varían los niveles de los factores, tal que se puedan cumplir de la mejor manera los óptimos individuales hasta alcanzar un óptimo global. El proceso de optimización multi-respuesta tiene aplicación en muchas áreas del conocimiento y con mayor frecuencia en problemas de diseño en ingeniería.

En problemas de optimización multi-objetivo es raro encontrar que las soluciones factibles den lugar a que todas las respuestas cumplan con su valor óptimo. Existen diferentes métodos para la optimización de múltiples variables de respuestas con ciertas metas establecidas, aquí se expondrán dos, uno de ellos se plantea mediante la naturaleza de la función de deseabilidad, discutido por Kros y Mastrangelo [1]. El segundo presentado por Kumar y Goel se basa en la lógica difusa [2], esta teoría proporciona un camino natural para tratar problemas en la cual la fuente de imprecisión es la ausencia de criterios bien definidos. La lógica difusa proporciona una herramienta matemática para tratar problemas multi-respuesta.

El objetivo en esta exposición es aplicar estos dos métodos a un par de situaciones industriales, además, mostrar como a través de la práctica expe-

rimental se pueden mejorar los procesos y en consecuencia obtener ahorros importantes en una empresa. Se presentan dos casos típicos de procesos industriales para ilustrar esta aplicación. En el primero se describe como una empresa consigue ahorros si mediante la estrategia experimental, logra la característica de calidad planteada, y luego reduce la variación entorno a esa respuesta. En el segundo se ilustra la forma de reducir costos en la elaboración de una fórmula industrial sin afectar otras características de calidad del producto. Conviene resaltar que la mejora continua en un proceso se puede alcanzar realizando experimentos de manera secuencial.

Para alcanzar esta meta es necesario modelar cada una de las características del proceso y luego aplicar procedimientos de optimización, uno de ellos es la función de deseabilidad modificada y el otro, derivado de la teoría de conjuntos difusos, se conoce como el método de desplazamiento ideal. El primero se caracteriza por ser un modelo de optimización multiplicativo y el segundo aditivo. Estos permitieron plantear una estrategia de optimización simultánea y se compararon con técnicas de graficación. Los dos métodos de optimización arrojaron resultados similares en el proceso de optimización cuando se aplicaron a los dos casos de estudio; sus óptimos se ilustran y evalúan mediante gráficas. Los métodos presentan ligeras diferencias al compararlos globalmente con la función de pérdida. Es conveniente comparar estos métodos ante distintas situaciones estadísticas, como pueden ser respuestas correlacionadas, valores aberrantes o variables de respuesta que sigan una distribución de probabilidad no normal.

## 2 Planteamiento del problema

La información se genera mediante un esquema experimental, la matriz  $G(n \times k)$  representa alguno de estos esquemas, donde  $n$  es el número de combinaciones (tratamientos) de los valores de  $k$  factores: variables de entrada al proceso. Varios esquemas experimentales se pueden plantear para este proyecto, tales como, diseños factoriales, diseños factoriales fraccionados, diseño Box–Benhken o diseño central compuesto [3]. Cada una de las variables de respuesta se pueden modelar con los resultados al aplicar alguno de estos diseños. Por lo general estos modelos son lineales y están en función de los

factores. Así para  $r$  respuestas se tienen  $r$  modelos, el  $j$ -ésimo modelo para esa respuesta  $Y_j$  se escribe como

$$Y_j = \beta_{j0} + X^t \beta_j + X^t B_j X + \varepsilon_j, \quad (1)$$

donde  $X^t = (x_1, \dots, x_k)$   $k$  factores,  $\beta_{j0}$  la constante,  $\beta_j = (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jk})$  un vector de parámetros,  $B_j = (\beta_{j11}, \dots, \beta_{j1k}, \beta_{jk1}, \dots, \beta_{jkk})$  matriz simétrica de parámetros de segundo orden, y  $\varepsilon_j \sim N(0, \sigma_j^2)$ ,  $j = 1, \dots, r$ .

El problema consiste en determinar la combinación de los factores que produzca el óptimo global, es decir, que todas las respuestas den su mejor valor. Esta situación se puede plantear como

$$\begin{aligned} \text{Optimizar} \quad & Y_1 \\ \text{sujeto a} \quad & Y_2 = M_1 \\ & \vdots \\ & Y_r = M_{r-1} \\ & X \in R, R : \text{región experimental}, \end{aligned} \quad (2)$$

donde los  $M_j$  ( $j = 1, \dots, r-1$ ) representan consideraciones importantes, objetivos o restricciones para las respuestas. En el procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados los modelos descritos en (1) se expresan por

$$\hat{Y}_j = \hat{\beta}_{j0} + X^t \hat{\beta}_j + X^t \hat{B}_j X, \quad (3)$$

donde  $\hat{\beta}_{j0}$ ,  $\hat{\beta}_j$  y  $\hat{B}_j$  son los estimadores de mínimos cuadrados.

## 2.1 Formulación del esquema de optimización

En problemas de optimización multi-respuesta es difícil encontrar un punto factible donde todas las respuestas tengan su valor óptimo. Por lo que se recurre a establecer que las desviaciones a valores ideales o a las metas especificadas sean mínimas. Para ello, se propondrá una función que tenga un grado de conformidad que el experimentador desearía tuviera cada respuesta en el proceso de optimización. Así la  $j$ -ésima ( $j = 1, \dots, r$ ) respuesta se maximiza cuando  $\hat{Y}_j(x)$  es igual a un valor objetivo  $M_j$  y decrece conforme se aleja de  $M_j$ . Si  $Y_j^-$  y  $Y_j^+$  representan respectivamente las cotas inferiores y superiores, que definen los valores extremos del proceso, entonces no se acepta una

solución  $x$  en la que  $\hat{Y}_j(x) \leq Y_j^-$  ni  $\hat{Y}_j(x) \geq Y_j^+$ . De esa manera el grado de conformidad con respecto a la respuesta tiende monótonamente a 1 cuando ésta se aproxima a  $M_j$ .

## 2.2 Función de deseabilidad

Se define la función de deseabilidad  $d_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) para cada respuesta como

$$d_j(\hat{Y}_j(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{Y}_j(x) \leq Y_j^- \text{ o } \hat{Y}_j(x) \geq Y_j^+ \\ 1 - \frac{M_j - \hat{Y}_j(x)}{M_j - Y_j^-} & \text{si } Y_j^- < \hat{Y}_j(x) \leq M_j \\ 1 - \frac{\hat{Y}_j(x) - M_j}{Y_j^+ - M_j} & \text{si } M_j \leq \hat{Y}_j(x) < Y_j^+. \end{cases} \quad (4)$$

Cuando el valor de  $\hat{Y}_j(x) \leq Y_j^-$  ó  $\hat{Y}_j(x) \geq Y_j^+$ , la función de deseabilidad tiene un valor de 0 e indica que no hay conformidad con la meta deseada, y cuando  $\hat{Y}_j(x) = M_j$  se alcanza el mejor valor posible y tiene una conformidad total, esto es,  $d_j(M_j) = 1$ . La función de deseabilidad depende de las condiciones del proceso y por lo que también se puede desear minimizar o maximizar la respuesta, en el primer caso  $M_j = Y_j^-$  se sustituye en la tercera función en la expresión (4) y en el otro caso  $M_j = Y_j^+$  va en la segunda función de (4). Las cotas  $Y_j^-$  y  $Y_j^+$  en cada una de las respuestas se deben especificar para definir la función de deseabilidad. Éstas pueden estar con base en los límites de especificación de los productos o procesos, a estándares de una empresa o simplemente a juicio del experimentador. También se pueden determinar en términos de los rangos físicos de la respuesta, y en tal caso, estos se plantean como los valores extremos de cada respuesta  $Y_j^- = \min(\hat{Y}_j(x))$  y  $Y_j^+ = \max(\hat{Y}_j(x))$ .

## 2.3 Formulación

En los problemas de multi-respuesta se requiere de una optimización global, lo que se traduce en una simultánea concordancia con respecto a todas las variables de respuesta;  $d_j = d(\hat{Y}_j(x))$  representa un conjunto de concordancias asociadas con las alternativas, entonces se considera la propuesta planteada

por Derringer y Suich [4] y reconsiderada por Derringer en [5], estas referencias dan lugar a generar una respuesta y ésta se define como el producto dado por

$$D(x, w) = \left( \prod_{j=1}^r d_j^{w_j} \right)^{\frac{1}{\sum w_j}}. \quad (5)$$

El objetivo es encontrar el valor de la variable de entrada  $x_o$  que maximice el valor de  $D$ , donde los  $w_j$  son pesos relativos entre las  $r$  respuestas ( $j = 1, \dots, r$ ); a la función  $D$  se le conoce como función de deseabilidad global. Si todos los pesos  $w_j$  igual a 1, la expresión (5) se reduce a la media geométrica.

El otro método propuesto para obtener un óptimo global lo propuso Zeleney en [6] y se conoce como el método del desplazamiento ideal, así la mejor alternativa se puede obtener por la función definida como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & F(x) = \left\{ \sum_{j=1}^r \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - d_j(\hat{Y}_j(x)) \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \\ \text{sujeto a} \quad & x \in R(x). \end{aligned} \quad (6)$$

### 3 Caso de estudio 1: proceso de moldeo por inyección

El proceso de moldeo por inyección es un proceso característico en la industria del hule o en el acabado de partes plásticas. En la actualidad varias industrias operan con este tipo de procesos. Un ingeniero realizó un experimento para obtener una pieza plástica en un proceso de moldeo por inyección. Idea general: las piezas de plástico moldeadas se fabrican conforme a especificaciones. En particular, el encogimiento de una pieza es una variable de interés principal en el moldeo por inyección. Es común que el dado de moldeo produzca piezas de un tamaño mayor, para permitir que después de la producción la pieza se encoja. ¿Cuáles debe ser las condiciones adecuadas del proceso para que se fabrique un producto con las dimensiones apropiadas?

El objetivo del proceso es determinar el efecto que tienen: la velocidad de inyección, el tiempo de enfriamiento, la temperatura del molde, la temperatura de la zona de barrido, las presiones de empaque y de inyección, el contenido de la mezcla, sobre el encogimiento de la pieza XX, cuya dimensión debe ser

de 6,5 unidades. Es conveniente indicar que los valores de los factores y de la respuesta se tratan de manera corregida por cuestiones confidenciales.

Preparativos iniciales: un grupo de trabajo se reunió para realizar varias pruebas iniciales dando valores a los factores señalados en el paso anterior. Con esta actividad lograron establecer valores apropiados para adecuar las condiciones del equipo. Los resultados arrojados por este estudio, permitieron definir un rango de valores para cada factor en los que se considera se pueden obtener buenos resultados en la dimensión de la pieza XX.

El plan experimental inicial consistió en llevar a cabo un arreglo conocido como factorial fraccionado  $2^{7-4}$ , expuesto por Castaño y Domínguez en [7], es decir, se aplicaron ocho combinaciones (tratamientos), cada factor con dos niveles. A partir de los resultados experimentales se tiene por el método de mínimos cuadrados el modelo  $\hat{Y} = 6,309 - 0,27x_1 + 0,43x_3 - 0,22x_5$ ; de los siete factores sólo tres resultaron significativos:  $x_1$ : velocidad de inyección,  $x_2$ : temperatura de molde y  $x_5$ : presión de empaque. Con esta información se realizó un segundo experimento con el fin de optimizar las pérdidas asociadas a la calidad, para ello es necesario, como se verá más adelante, optimizar la media y varianza o desviación estándar, en esta situación el modelo multi-respuesta planteado en (2) se reduce a dos respuestas. Para alcanzar este objetivo se aplicó el diseño conocido como Box–Behnken [3], en cada tratamiento se consideraron cuatro condiciones de ruido que se deben al proveedor y a una sustancia química. Estas condiciones permitieron calcular la media para el encogimiento de cada pieza y la desviación estándar (de) o la varianza en cada tratamiento; el arreglo experimental y los resultados se muestran en la tabla (1).

A partir del principio de mínimos cuadrados aplicados al modelo (1) se obtienen los dos modelos ajustados  $\hat{Y}_1 = \hat{\mu}(x)$  y  $\hat{Y}_2 = \hat{\sigma}(x)$ , descritos en (3) para  $j = 1, 2$ ; los modelos de segundo orden que mejor se ajustaron para la media y desviación estándar respectivamente son

$$\hat{Y}_1(x) = \hat{\mu}(x) = 5,38 - 0,82x_1 - 0,92x_2 + 0,84x_1x_2 + 0,06x_1^2 + 0,5x_2^2, \quad (7)$$

con  $R^2 = 0,99$  y  $CM_{error} = 1,208 \times 10^{-3}$  y

$$\hat{Y}_2(x) = \hat{\sigma}(x) = 0,28 - 0,34x_2 + 0,13x_3 - 0,1x_2x_3 + 0,2x_2^2 + 0,12x_3^2, \quad (8)$$



**Tabla 1:** Combinaciones de los valores de los factores y sus respectivas media y desviación estándar

| Trat | Factor 1 | Factor 2 | Factor 3 | Media | de    |
|------|----------|----------|----------|-------|-------|
|      | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $Y_1$ | $Y_2$ |
| 1    | 0,8      | 60       | 400      | 8,55  | 0,668 |
| 2    | 2,2      | 60       | 400      | 5,20  | 0,695 |
| 3    | 0,8      | 80       | 400      | 5,00  | 0,125 |
| 4    | 2,2      | 80       | 400      | 5,00  | 0,138 |
| 5    | 0,8      | 70       | 250      | 6,30  | 0,245 |
| 6    | 2,2      | 70       | 250      | 4,65  | 0,239 |
| 7    | 0,8      | 70       | 550      | 6,25  | 0,418 |
| 8    | 2,2      | 70       | 550      | 4,65  | 0,430 |
| 9    | 1,5      | 60       | 250      | 6,85  | 0,751 |
| 10   | 1,5      | 60       | 250      | 5,00  | 0,131 |
| 11   | 1,5      | 80       | 550      | 6,75  | 1,273 |
| 12   | 1,5      | 80       | 550      | 5,00  | 0,253 |
| 13   | 1,5      | 70       | 400      | 5,40  | 0,252 |
| 14   | 1,5      | 70       | 400      | 5,35  | 0,324 |
| 15   | 1,5      | 70       | 400      | 5,40  | 0,268 |

con  $R^2 = 0,96$  y  $CM_{error} = 9,92 \times 10^{-3}$ . En el proceso de optimización se requiere que la media tenga un valor objetivo igual 6,5 y la desviación estándar sea mínima; de acuerdo al planteamiento en (2) se tiene

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} \quad \hat{Y}_2(x) \\
 &\text{sujeto a} \quad \hat{Y}_1(x) = 6,5. \\
 &\quad \quad \quad x \in R(x), \text{ la región experimental,}
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde  $\hat{Y}_1(x)$  y  $\hat{Y}_2(x)$  son los modelos ajustados representados por las ecuaciones (7) y (8). Utilizando el planteamiento expuesto en (4) y (5) se obtiene el óptimo  $x_o$  por la función de deseabilidad, así  $D(x_o) = (d_1 d_2)^{1/2} = ((0,9957)(0,9923))^{1/2} = 0,962$ . Los valores óptimos correspondientes se muestran en la tabla (2). De manera análoga aplicando la fórmula (6) se obtiene el óptimo mediante el método del desplazamiento ideal; el óptimo que genera la función  $F$ , es  $F(x_{co}) = 0,15$ , tabla (2). Existen un conjunto de soluciones óptimas que produce cada método, esto da lugar a tener varias opciones para alcanzar un óptimo.

Tabla 2: Resultados del proceso de optimización

| Función            | Óptimo         |                |                |                | Media                              | de                                 |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------------------------|------------------------------------|
|                    | $\mathbf{x_o}$ | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $\mathbf{x_3}$ | $\hat{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{x_o})$ | $\hat{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{x_o})$ |
| $D(x_o) = 0,962$   |                | -1,0           | -0,11          | -0,57          | 6,499                              | 0,209                              |
| $F(x_{co}) = 0,15$ |                | -1,0           | -0,07          | -1,0           | 6,449                              | 0,221                              |

Las técnicas de graficación son de mucha utilidad para ilustrar ese conjunto de soluciones, en la figura (1) se observan las curvas de nivel para cada método, a la izquierda están las que corresponden a la función de deseabilidad con  $x_3 = -0,57$  y a la derecha las relativas a la función del desplazamiento ideal en  $x_3 = -1$ . En ésta se marca con gris la región de posibles soluciones alternativas, una solución de la región “sombreada” está descrita en la tabla (2); se puede observar que ambos procedimientos de optimización dan resultados similares.

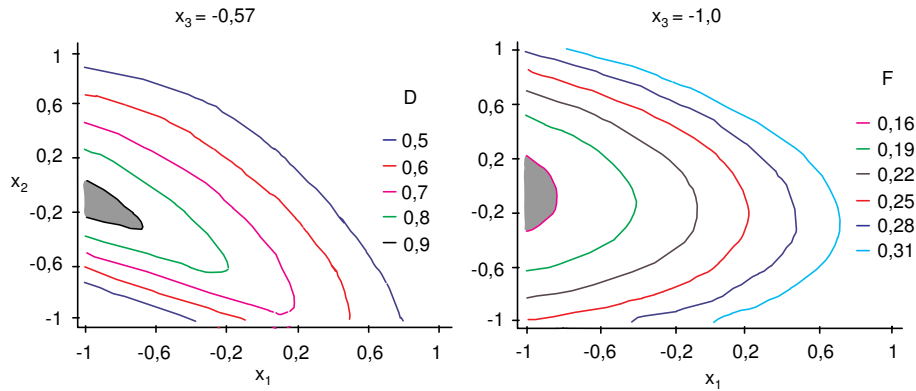
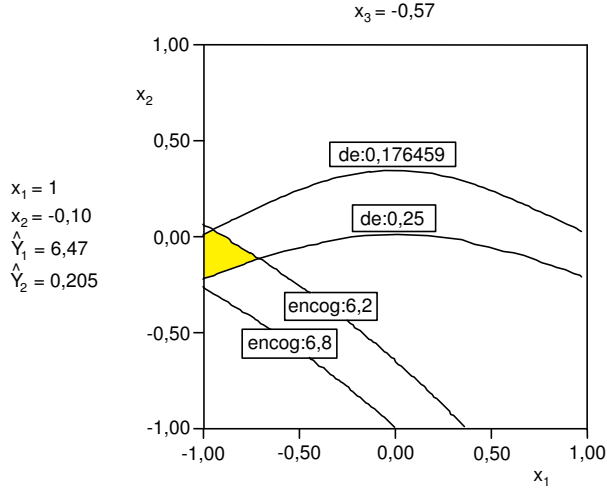


Figura 1: Curvas de nivel que caracterizan a los dos métodos de optimización

El procedimiento de optimización mediante el método gráfico es una alternativa relevante a los métodos analíticos. En la figura (2) se muestra el potencial del método gráfico, ya que la región que se obtiene a partir de este método da lugar a un escenario de soluciones factibles para optimizar las dos respuestas  $\hat{Y}_1$  y  $\hat{Y}_2$  a la vez. Además, se ilustra como las soluciones que se han obtenido por los dos métodos analíticos citados, están contenidas en la zona

sombreada que representa a la región de soluciones. La figura (2) describe las curvas de nivel de los modelos descritos por (7) y (8) respectivamente.



**Figura 2:** Curvas de nivel para los modelos expresiones (7), (8) y la región óptima

**Interpretación económica:** una particularidad interesante del resultado anterior es que se puede evaluar en términos económicos, lo que resulta de mucha utilidad para reducir costos. Intuitivamente se sabe que si el encogimiento se aleja de 6,5 hay una pérdida, que se refleja en dinero. En símbolos  $P(\hat{Y}(x)) = k(\hat{Y}(x) - M)^2$ ,  $k$  es una constante del costo de calidad; por el momento y para interpretación de este caso de estudio, la función de pérdida se ha expresado con respecto a una variable de respuesta, pero ésta se puede generalizar para el caso multi-respuesta planteada por Ames et al en [8] y por Meyer y Montgomery en [9]. El valor estimado del promedio esperado de esta pérdida se escribe por

$$P_e(\hat{Y}(x)) = E(\widehat{P(\hat{Y}(x))}) = k[\hat{\sigma}^2(x) + (\hat{\mu}(x) - M)^2] = k[\hat{Y}_2^2(x) + (\hat{Y}_1(x) - M)^2]. \quad (10)$$

Se puede observar que en esta expresión interviene la varianza y la diferencia entre la media y el valor objetivo. De esta manera en la función de pérdida representada por (10) se sustituyen los óptimos generados por los modelos ajustados (7) y (8) y esta operación optimiza la pérdida, es decir, en  $x_o$ ,  $P_e(\hat{Y}(x)) = k(0,209^2 + (6,499 - 6,5)^2) = k(0,044)$  para la función

de deseabilidad  $D$  y  $P_e(\hat{Y}(x)) = k(0,221^2 + (6,449 - 6,5)^2) = k(0,051)$  para el método de la función  $F$ . Ambos métodos producen un valor parecido para la pérdida media esperada (10), aunque en términos prácticos la función de deseabilidad tiene ventaja porque la pérdida es menor, ver tabla (3).

**Tabla 3:** Comparación de los dos métodos mediante la función de pérdida

| Función            | $P_e(\hat{Y}(\mathbf{x}))$      |
|--------------------|---------------------------------|
| $D(x_o) = 0,962$   | $P_e(\hat{Y}(x_o)) = 0,044k$    |
| $F(x_{co}) = 0,15$ | $P_e(\hat{Y}(x_{co})) = 0,051k$ |

Se puede observar de (10) que reducir la varianza tiene un impacto en el valor de  $P_e(\hat{Y}(x))$ ; por eso en la mejora continua de los procesos se habla mucho de reducir su variabilidad, entre otras cosas por que tiene un significado económico. Es conveniente señalar que (10) representa el problema de bi-respuesta, en este caso, en una función simple, la cual se puede optimizar de manera directa en función del planteamiento en (9).

4 Caso de estudio 2: formulación

Experimento para reducir el costo de una formulación sin afectar otras características de calidad. Existen varias empresas que en la entrada de sus procesos emplean una formulación. Por ejemplo, en la curtiduría emplean ciertas formulaciones para dar ciertas características de acabado y en consecuencia de calidad a las pieles. La formulación requiere de varias sustancias químicas dadas en porcentaje. También en la industria del hule y del plástico es común usar formulaciones para el acabado del proceso.

Se llevó a cabo un experimento con la finalidad de reducir el costo de una formulación, sin afectar tres características de calidad en un proceso de curtiduría. En este estudio se plantean los factores y respuestas de manera ficticia por razones de confidencialidad. Sin muchos detalles específicos del proceso, se propone el diseño factorial fraccionado  $2^{6-3}$ .

Después de un estudio cuidadoso se determinó que seis sustancias son parte esencial de la formulación, todas con dos valores que se identificarán con los números  $-1$  y  $1$ . Las sustancias se indicarán por  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  y

$x_6$ , y éstas tienen un efecto en cuatro variables de respuesta, dos químicas, una física y la relativa al costo. Las respuestas se denotarán por  $Y_{q1}$ ,  $Y_{q2}$ ,  $Y_f$  y  $Y_c$  respectivamente. Las restricciones de éstas y sus características de calidad se describen a continuación:  $0,70 \leq Y_{q1}$ ,  $90 \leq Y_{q2}$ ,  $17,5 \leq Y_f$  y  $Y_c \leq 60$ .

El costo actual de la formulación es de 72, por ello un valor del costo no mayor a 60 representa para la empresa un sustancial ahorro anual. Conforme al planteamiento de optimización en (2), se requiere en este caso

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && Y_c \\
 &\text{suje to a} && 0,70 \leq Y_{q1} \\
 & && 90 \leq Y_{q2} \\
 & && 17,5 \leq Y_f \\
 & && Y_c \leq 60. \\
 & && X \in R : \text{región experimental.}
 \end{aligned} \tag{11}$$

El diseño experimental y los resultados al aplicar los diferentes tratamientos se muestran en la tabla (4).

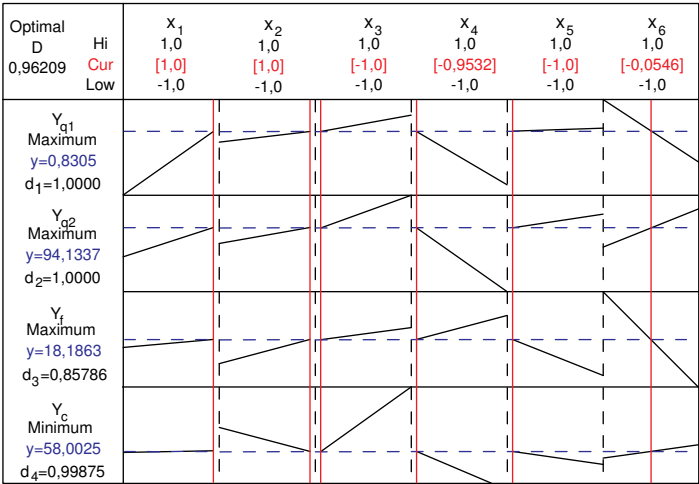
**Tabla 4:** Esquema experimental  $2^{6-3}$  y los resultados para cada variable

| Trat | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $Y_{q1}$ | $Y_{q2}$ | $Y_f$ | $Y_c$ |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-------|-------|
| 1    | -1    | -1    | -1    | 1     | 1     | 1     | 0,68     | 40       | 17,6  | 49    |
| 2    | 1     | -1    | -1    | -1    | -1    | 1     | 0,78     | 100      | 17,3  | 64    |
| 3    | -1    | 1     | -1    | -1    | 1     | -1    | 0,76     | 93       | 17,6  | 58    |
| 4    | 1     | 1     | -1    | 1     | -1    | -1    | 0,80     | 45       | 19,0  | 49    |
| 5    | -1    | -1    | 1     | 1     | -1    | -1    | 0,70     | 60       | 18,3  | 75    |
| 6    | 1     | -1    | 1     | -1    | 1     | -1    | 0,88     | 100      | 18,0  | 77    |
| 7    | -1    | 1     | 1     | -1    | -1    | 1     | 0,78     | 100      | 18,3  | 73    |
| 8    | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0,75     | 100      | 17,6  | 66    |

En la realidad práctica trabajar con seis factores y con tan sólo dos valores, cada uno ellos, implica una actividad experimental muy laboriosa y costosa, ya que en este caso se requieren 64 tratamientos. El potencial de la estrategia experimental permitirá sin realizar muchas pruebas ganar un conocimiento sustancial y alcanzar un adecuado funcionamiento del proceso. Con el propósito de determinar el efecto de los factores y obtener los modelos, se aplica el principio de mínimos cuadrados para obtener los cuatro modelos

ajustados, en este caso, descritos en la expresión (3). El proceso de optimización enunciado en (11) se aplicó al estudio de la formulación en un proceso de curtiduría, aquí se mostrarán de manera resumida mediante una gráfica los resultados de optimización aplicando el método de la función de deseabilidad. Este potencial gráfico permitirá evaluar, de manera visual, el efecto que cada factor tiene sobre las diferentes respuestas.

En la figura (3), las letras en las columnas representan a los seis factores y en los renglones a las cuatro respuestas. Para fijar ideas en su interpretación, primero observe por renglón, por ejemplo, para la respuesta uno:  $Y_{q1}$ , se tiene que los factores  $x_1$ ,  $x_4$  y  $x_6$  son los más importantes, esto se concluye de manera intuitiva porque son los de mayor pendiente. Esto significa que hay un efecto al cambiar del nivel 1 al nivel 2 en esos factores. Similares conclusiones se tienen para las otras respuestas. Sin embargo, sólo se destacará que el factor  $x_3$  tiene un efecto relevante en lo que se refiere al costo. Además, la significancia mencionada en cada caso se verificó empleando métodos estadísticos apropiados.



**Figura 3:** Esquema para evaluar el efecto de cada factor y la optimización global del proceso

Otro de los aspectos sobresalientes de la figura (3), es la posibilidad de optimizar el proceso aplicando la función de deseabilidad. De esa manera

cumplir con el objetivo propuesto, es decir, minimizar el costo sin afectar las otras características de calidad. Es conveniente indicar cuales son los elementos principales de esta gráfica entorno a la optimización. Así, el valor de la letra  $d$  equivale al grado de deseabilidad de la respuesta, de ese modo, un valor de  $d$  cercano a 1, quiere decir que la respuesta es deseable. En ese sentido, de la figura (3) se puede concluir que todas las respuestas tienen un valor de deseabilidad alto. Por lo que la deseabilidad global, cuyo valor se indica por  $D$ , tiene un valor apropiado. Eso se interpreta diciendo que el proceso alcanza una respuesta óptima global.

La interpretación del óptimo en la figura (3) es como sigue, las líneas gruesas indicarán donde poner los valores de las sustancias que satisfacen la fórmula óptima. Estos valores se marcaron en los corchetes [ ] en el renglón referente a los factores. Así, el factor  $x_1$  debe tener el que corresponde al nivel 1. También el factor  $x_2$  debe estar en el nivel 1, los factores  $x_3$  y  $x_5$  en los valores acordes al nivel  $-1$ . El factor  $x_4$  se aproxima al nivel  $-1$ , finalmente,  $x_6$  debe tener aproximadamente un valor intermedio al que se aplicó en el experimento. Con estos valores se obtiene la nueva fórmula. Para establecer valores puntuales en los niveles de los factores, se plantea la siguiente expresión:  $x_i = (X_{il} - \bar{X}_i)/0,5(X_{i2} - X_{i1})$  ( $i = 1, \dots, k$ ) ( $l = 1, 2$ ) donde  $X_{i1}$  y  $X_{i2}$  representan los dos valores reales del factor.

Moviendo las líneas gruesas se pueden crear varios escenarios, los cuales les permite a los ingenieros tomar diferentes decisiones para ajustar sus procesos a los niveles de los factores que estimen convenientes. Este óptimo permite concluir que la nueva formulación mantiene el proceso con las características de calidad apropiadas a un menor costo, lo que repercutirá en un ahorro económico sustancial para un proceso. Las gráficas y los análisis estadísticos se realizaron utilizando el paquete estadístico minitab [10].

Finalmente, se aplica (6) para calcular el óptimo aplicando el método del desplazamiento ideal, el punto óptimo resultante es  $x_{co} = \{1, 1, -1, -0,5, 1, -1\}$ , los valores óptimos en las respuestas correspondientes a este punto son:  $\hat{Y}_{q1}(x_{co}) = 0,815$ ;  $\hat{Y}_{q2}(x_{co}) = 96,75$ ;  $Y_f(x_{co}) = 17,71$  y  $Y_c(x_{co}) = 56,19$ . El punto óptimo  $x_{co}$  es similar al óptimo de la función de deseabilidad en los tres primeros factores y es diferente en los valores correspondientes del cuarto al último factor. Esta situación marca una diferencia en los resultados de las respuestas dos y cuatro, en la tabla (5) se presenta un resumen de los

resultados, y en la última columna se hace una comparación de los métodos mediante la función de pérdida para varias variables, esta última se escribe por

$$P(\widehat{Y}(x)) = \sum_{j=1}^r k_j [(\widehat{Y}_j - M_j)^2], \tag{12}$$

donde  $M_j$   $j$  valores objetivos y  $k_j$  pesos.

**Tabla 5:** Resultados del proceso de optimización para el caso 2 y comparación de los dos métodos

| Función            |       |       |       |       |       |       |                       |                       |                    |                    |                     |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------------|-----------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
|                    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\widehat{Y}_{q1}(x)$ | $\widehat{Y}_{q2}(x)$ | $\widehat{Y}_f(x)$ | $\widehat{Y}_c(x)$ | $P(\widehat{Y}(x))$ |
| $D(x_o) = 0,96$    | 1,0   | 1,0   | -1,0  | -0,9  | -1,0  | 0,1   | 0,83                  | 94,13                 | 18,19              | 58,0               | 0,0091              |
| $F(x_{co}) = 0,10$ | 1,0   | 1,0   | -1,0  | -0,5  | 1,0   | -1,0  | 0,82                  | 96,75                 | 17,71              | 56,2               | 0,0049              |

Para poder llevar a cabo la comparación de los métodos, dada la diferencia de unidades en las respuestas, se estandarizaron los valores objetivos (11)  $T_j = M_j/\sqrt{\left(\sum M_j^2\right)}$  y los óptimos mediante  $V_j = Y_j/\sqrt{\left(\sum Y_j^2\right)}$ . Se sustituyen  $T_j$  y  $V_j$  en (12) y se obtienen los valores de la última columna de la tabla (5). En esta situación resultó mejor el método del desplazamiento ideal, puesto que la función de pérdida es menor.

5 Conclusión

En los dos ejemplos presentados, los resultados que generan ambos métodos de optimización son bastante similares, no obstante que uno tiene un carácter multiplicativo y el otro aditivo. Sin embargo, al compararlos mediante la función de pérdida (10), y como se muestra en la tabla (3), el método de la función de deseabilidad muestra una diferencia que en la práctica puede resultar relevante en función de los costos de calidad. Para el caso de estudio 2, el método de la función de desplazamiento ideal alcanza globalmente un mejor resultado, como se advierte en la última columna de la tabla (5), donde la función de pérdida es menor. En particular, para este



caso, la diferencia en los resultados se puede originar a partir de la correlación entre las respuestas, por ejemplo como se observa en la figura (3) para las variables 1, 2 y 3 en los factores 3 y 4, mientras que para el factor 3 las respuestas de las tres variables aumentan, estas disminuyen para el factor 4. Es necesario profundizar en la comparación de estos métodos ante las siguientes consideraciones estadísticas: correlación entre las variables de respuesta, la existencia de datos aberrantes, o si los datos en las respuestas provienen de una distribución de probabilidad no normal. Es oportuno resaltar algunas ventajas que proporcionó el método gráfico para detectar regiones óptimas comunes a los dos procedimientos. En referencia al método gráfico se puede decir que es visual, práctico y amigable. Por otro lado, presenta soluciones competitivas con respecto a los métodos analíticos. Resulta muy útil porque puede aplicarse en procesos cotidianos. Es una guía para los responsables de los procesos con el fin de disminuir costos, seleccionando niveles de los factores que den lugar a una combinación de tratamientos más económica. Por su carácter gráfico es un auxiliar para detectar la presencia de varias regiones factibles. Ayuda a generar mayor conocimiento del proceso bajo estudio. Finalmente, la integración del método gráfico con los métodos analíticos proporcionan una alternativa potencial para la optimización simultánea a los problemas multi-respuesta [11].

Se han presentados dos ejemplos en los que se ilustra como a través de una adecuada planeación experimental se alcanzan importantes ahorros económicos. Esto se da en el contexto de los procesos que ya están operando, sin embargo en la investigación y desarrollo tecnológico (ID), la planeación experimental es una auxiliar para que un ingeniero logre una mayor competitividad con el desarrollo de nuevos productos. Además ayudará, a las personas que se involucren en los procesos, a conocer más sobre los factores que impactan en la calidad de los productos o procesos; luego de usar esta experiencia para mejorar la calidad y hacer los cambios con el fin de prevenir problemas y reducir la variación. En ese sentido el ciclo de mejora y la planeación experimental son métodos importantes para contribuir al aprendizaje de los ingenieros que están el área de ID de una empresa. Donde además se deben considerar nuevos materiales, nuevas técnicas de producción y nuevas tecnologías.

## 6 Agradecimientos

Al Consejo de Ciencia y Tecnología del estado de Guanajuato por su apoyo al convenio 06-02-K117-87.

## Referencias

- [1] F. J. Kros and C. M. Mastrangelo. *Comparing Multi-response Design Methods with Mixed Responses*. Qual. Reliab. Eng. Int., **20**(5), 527-539 (2004).
- [2] P. Kumar and P. Goel. *Product Quality Optimization Using Fuzzy Set Concepts: A Case Study*. Qual. Eng., **15**(1), 1-8 (2002).
- [3] G. E. P. Box and N. R. Draper. *Empirical Model Building and Response Surfaces*, ISBN: 0-471-81033-9. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- [4] G. Derringer and R. Suich. *Simultaneous Optimization of Several Response Variables*. Journal of Quality Technology, 12, 214-219 (1980).
- [5] G. Derringer. *A Balancing Act: Optimizing a Product's Properties*. Quality Progress, 51-58 (1994).
- [6] M. A. Zeleney. *A Concept of Compromise Solutions and Method of Displaced Ideal*. Comput. Oper. Res., 1, 479-496 (1974).
- [7] T. E. Castaño y D. J. Domínguez. *Experimentos: Estrategia y Análisis en Ciencia y Tecnología*. Ediciones CIMAT, 2004. Distribución: [www.cimat.mx](http://www.cimat.mx)
- [8] A. E. Ames, M. Mattucci, M. Stephen, G. Szonyi and D. M. Hawkins. *Quality Loss Functions for Optimization Across Multiple Response Surfaces*. Journal of Quality Technology, 29, 339-346 (1997).
- [9] R. Myers and D. C. Montgomery. *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. Wiley Series in Probability and Statistics, New York, 2002.
- [10] Minitab 2003. Release 14 for Windows, by Minitab Inc. USA.
- [11] F. Ortiz, J. Simpson and J. Pignatiello. *A genetic Algorithm Approach to Multiple-Response Optimization*. Journal of Quality Technology, 36, No. 4, 432-450 (2004).